Né la critica profonda dei principi può mai nuocere alla solidità dell'edificio scientifico, quando pure non conduca a scoprirne e riconoscerne meglio le basi vere e proprie.

Mossi da questi intendimenti noi abbiamo cercato, per quanto le nostre forze lo consentivano, di dar ragione a noi stessi dei risultati a cui conduce la dottrina di LOBATSCHEWSKY; e, seguendo un processo che ci sembra in tutto conforme alle buone tradizioni della ricerca scientifica, abbiamo tentato di trovare un substrato reale a quella dottrina, prima di ammettere per essa la necessità di un nuovo ordine di enti e di concetti. Crediamo d'aver raggiunto questo intento per la parte planimetrica di quella dottrina, ma crediamo impossibile di raggiungerlo in quanto al resto.

Il presente scritto o destinato principalmente a svolgere la prima di queste tesi; della seconda non daremo che un cenno sommario alla fine, solo perché si possa più rettamente giudicare del significato inerente alla proposta interpetrazione.

Per non interrompere troppo spesso la nostra esposizione, abbiamo rimandato a note speciali, poste in fine, le dichiarazioni relative a certi risultati analitici sui quali dobbiamo appoggiarci.

Il criterio fondamentale di dimostrazione della geometria elementare è la *sovrap-ponibilità ddk figure eguali.*

Questo criterio non è applicabile soltanto al piano, ma a tutte quelle superficie su cui possono esistere figure eguali in differenti posizioni, cioè a tutte quelle superficie di cui una porzione qualunque può essere adagiata esattamente, per via di semplice flessione, sopra una qualunque altra porzione della superficie stessa. Ognun vede infatti che la rigidezza delle superficie sulle quali le figure si concepiscono non è una condizione essenziale dell'applicazione di quel criterio, talché p. es. non nuocerebbe all'esattezza delle dimostrazioni della geometria piana euclidea il concepirne le figure come esistenti sulla superficie di un cilindro o di un cono, anziché su quella di un piano.

Le superficie per le quali si avvera incondizionatamente la proprietà anzidetta sono, in virtù di un celebre teorema di GAUSS, tutte quelle che hanno costante in ogni punto il prodotto dei due raggi di curvatura principale, ossia tutte quelle la cui curvatura sferica è costante. Le altre superficie non ammettono l'applicazione incondizionata del principio di sovrapposizione al confronto delle figure tracciate sovr'esse, e quindi queste figure non possono avere una struttura affatto indipendente dalla loro posizione.

L'elemento più essenziale delle figure e delle costruzioni della geometria elementare è la linea retta. Il carattere specifico di questa è d'essere completamente determinata da due soli dei suoi punti, talché due rette non possono passare per due dati punti dello spazio senza coincidere in tutta la loro estensione. Però nella geometria

piana questo